Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

# II ОБЛАСНИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

## Завдання для вибіркових етапів

*Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язанні повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій. А задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити (тобто творчо ускладнити), і це буде неодмінно оцінено журі Турніру.*

*Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!*

1. «*Степені двійки*». Нехай $a_n$ – перша цифра десяткового запису числа $2^n$, $n \in N$. Визначте кількість одиниць серед *175, 1834, 2009* перших членів послідовності $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

2. «*Функціональна нерівність*». Нехай задано дійсне число $\lambda \in (0,1)$. Дослідіть властивості таких функцій $f:[0,1] \to R$, що $f(0) = f(1) = 0$, і для будь-яких $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ справджується нерівність $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$.

3. «*Невичерпні числа Фібонначі*». Послідовність чисел Фібонначі задається рівностями: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Доведіть, що для всіх цілих $k \geq 0$:

а) $F_{6k+1}^2 + F_{6k+2}^2 + F_{6k+5}^2 - 3$ ділиться без остачі на 4;

б) $F_{2k+1} + F_{2k+3} + 2^{2k+1}$ ділиться без остачі на 5;

в) $(2k+1)F_{2k} + kF_{2k+1}$ ділиться без остачі на 5.

4. «*Рівняння з параметрами*». Дослідіть рівняння

$$a^2x^4 + 5ax^3 + (2ab-6)x^2 + 5bx + b^2 = 0.$$

(У залежності від значень параметрів $a \in R$ і $b \in R$).

5. «*Куб та площина*». Нехай куб лежить по один бік відносно деякої площини. Доведіть, що набір з восьми чисел – відстаней від вершин куба до цієї площини – можна розбити на дві такі четвірки $\{a;b;c;d\}$ і $\{e;f;g;h\}$, що $a+b+c+d=e+f+g+h$ і $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2$. Дослідіть питання щодо співвідношення між числами $a^3+b^3+c^3+d^3$ і $e^3+f^3+g^3+h^3$ для розглядуваних четвірок.

6. «*Тригонометрія та двогранні кути*». Дано трикутну піраміду $SABC$, у якій $\angle BSC=\alpha, \angle CSA=\beta, \angle ASB=\gamma$, і двогранні кути при ребрах $SA$ і $SB$ мають величину $\varphi$ і $\delta$ відповідно. Доведіть, що $\gamma > \alpha \cdot \cos\delta + \beta \cdot \cos\varphi$.

7. «*Трансцендентне рівняння*». $a,b,c,d$ – дійсні числа, причому $a>0, b>0, a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$. Дослідіть кількість розв’язків рівняння вигляду $a^x = b^x + cx + d$.

8. «*Сума $k$-х степенів*». Позначимо через $S_k(n)$ – сума $k$-х степенів всіх чисел від *1* до $n$, $k \in Z$. Доведіть, що $S_1(n)=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Знайдіть аналогічні формули для обчислення $S_2(n), S_3(n), S_n(n)$. Доведіть їх. Спробуйте розв’язати цю задачу для довільного $k$.

9. «*Три кола*». Три кола радіуса *r* перетинаються у одній точці. Довести, що три інші точки перетину цих кіл лежать на колі радіуса *r*.

10. «*Гра з числами*». Нехай задано натуральне число $n$. Двоє гравців, Андрійко та Миколка, по черзі записують на дошці натуральні числа, кожне з яких не перевищує $n$, за такими правилами: гру розпочинає Андрійко, записуючи число 1, далі, якщо гравець, роблячи свій черговий хід, записав на дошці число $k$, то його суперник своїм ходом повинен записати одне з чисел $k+1, 3k$ або $4k$ на свій вибір. Переможцем вважається той із гравців, який записав на дошці число $n$. Складіть алгоритм, який за даним числом $n$ визначатиме, хто з гравців може забезпечити собі перемогу в цій грі. Знайдіть усі такі натуральні $n$, які не перевищують 2009, і для яких виграшну стратегію має Миколка.

11. «*Авіалінії*». На географічній карті вибрані п'ять міст. Відомо, що серед них з будь-яких трьох знайдуться два, з'єднані авіалініями, і два – не з’єднані. Потрібно довести, що:

1) Кожне місто з'єднане авіалініями безпосередньо з двома і тільки з двома іншими містами.

2) Вилетівши з будь-якого міста, можна облетіти інші, побувавши в кожному по одному разу, і повернутися назад.

12. «*Дешифруючий ключ*». Суперник знає, що Аліса та Боб листуються українською мовою і криптують свою кореспонденцію за допомогою монограмного лінійного шифру. При цьому використовується 34-символьний алфавіт, де номери від 0 до 32 належать літерам української абетки, а 33-тім символом є пропуск. Частотний аналіз показав, що у потоці криптотекстів найчастіше зустрічається літера Ю. Опираючись на той факт, що найпоширенішим символом в українських текстах є пропуск, знайти дешифруючий ключ і розшифрувати криптотекст ЕЩЯБУОДЮЛРЮНОМРЗРЮЕБОБ (Вказівка: криптування відбувається за такою схемою $ax = x'$, якщо $ax > 34$, то він замінюється остачею від ділення цього числа на 34, це і буде номер літери $x'$ в алфавіті. $a$ називається шифруючим ключем, для відшукання дешифруючого ключа корисно використати алгоритм Евкліда).

13. «*Центри трикутника*». Дано трикутник $ABC$ ($AB > BC > CA$). До якої із сторін найближче розташована точка:

а) центр описаного кола;

б) ортоцентр трикутника;

в) центр ваги трикутника;

г) інцентр трикутника.